

ДГКМ
ДРУШТВО НА
ГРАДЕЖНИТЕ
КОНСТРУКТОРИ НА
МАКЕДОНИЈА

Партизански одреди 24,
П.Фах 560, 1001 Скопје
Македонија

MASE
MACEDONIAN
ASSOCIATION OF
STRUCTURAL
ENGINEERS

Partizanski odredi 24,
P. Box 560, 1001 Skopje
Macedonia

СИ-6

mase@gf.ukim.edu.mk
<http://www.mase.org.mk>

Елена ДУМОВА-ЈОВАНСКА¹, Горан МАРКОВСКИ², Сергеј ЧУРИЛОВ³,
Ангел Марк СЕРЕЧИ⁴, Тино МИХАЈЛОВИЌ⁵, Сашо АТАНАСОВСКИ⁶

МЕТОДОЛОГИЈА ЗА ОПРЕДЕЛУВАЊЕ РЕАЛЕН ПРЕСМЕТКОВЕН МОДЕЛ ЗА ПОСТОЕЧКИ КОНСТРУКЦИИ СО АМБИЕНТАЛНИ ВИБРАЦИСКИ МЕРЕЊА

РЕЗИМЕ

Во овој труд прикажана е методологија за определување реален пресметковен модел за постоечки конструкции кој што се базира на процена и идентификација на динамичките карактеристики со помош на експериментални мерења со амбиентални вибрации. Добиените резултати од мерењата овозможуваат ажурирање на параметрите за материјалот на почетниот пресметковен модел добиен со методот на конечни елементи користејќи ги природните фреквенции и тоновите форми. Ажурирањето и добивањето реален модел е извршено мануелно, со варирање на неколку клучни параметри за материјалот. На овој начин се добива модел кој ја отсликува вистинската носивост на конструкцијата.

Клучни зборови: амбиентални вибрации, модел, постоечка конструкција, носивост.

Elena DUMOVA-JOVANOSKA¹, Goran MARKOVSKI², Sergey CHURILOV³,
Angel Mark SERECI⁴, Tino MIHAJLOVIK⁵, Saso ATANASOVSKI⁵

METHODOLOGY FOR DEFINITION OF GENUINE CALCULATION MODEL FOR EXISTING STRUCTURES BY AMBIENT VIBRATION MEASUREMENTS

SUMMARY

This paper presents methodology for definition of genuine calculation model for existing structures based on estimation and identification of structural modal parameters by ambient vibration measurements. Obtained experimental results are used for modal updating of material parameters of the initial finite element calculation model with the help of extracted natural frequencies and mode shapes. Manual model updating by variation of several key material parameters was performed. Thereby, a model which reflects real bearing capacity of the building was obtained.

Keywords: ambient vibration, model, existing structure, capacity.

¹ проф. д-р, Градежен факултет, Универзитет „Св.Кирил и Методиј“, Скопје, dumova@gf.ukim.edu.mk

² проф. д-р, Градежен факултет, Универзитет „Св.Кирил и Методиј“, Скопје, markovski@gf.ukim.edu.mk

³ ас. м-р, Градежен факултет, Универзитет „Св.Кирил и Методиј“, Скопје, curilov@gf.ukim.edu.mk

⁴ MBA, President & CEO, Digitexx Data Systems Inc., amsereci@digitexx.com

⁵ деи., Digitexx Data Systems Inc., Senior Software Engineer & Customer Support, tinomihailovic@digitexx.com

⁶ деи., Digitexx Data Systems Inc., Systems Engineer and QA, saso.atanasovski@digitexx.com

1. ВОВЕД

Пресметковните модели кои што се користат при динамичка анализа на реалните објекти претставуваат идеализирани модели кои го претставуваат нивниот одговор од различни динамички товари, како на пример: земјотреси, силни ветрови, експлозии и слично. Тие може да се контролираат преку спроведување експериментални тестови на објектите во реален размер преку амбиентални и принудни вибрации (Ivanović et al. 2000). Со двата метода може да се идентификуваат основните динамички карактеристики на конструктивниот систем на објектот, односно природните фреквенции на осцилации, коефициентите на пригушување и тоновите форми.

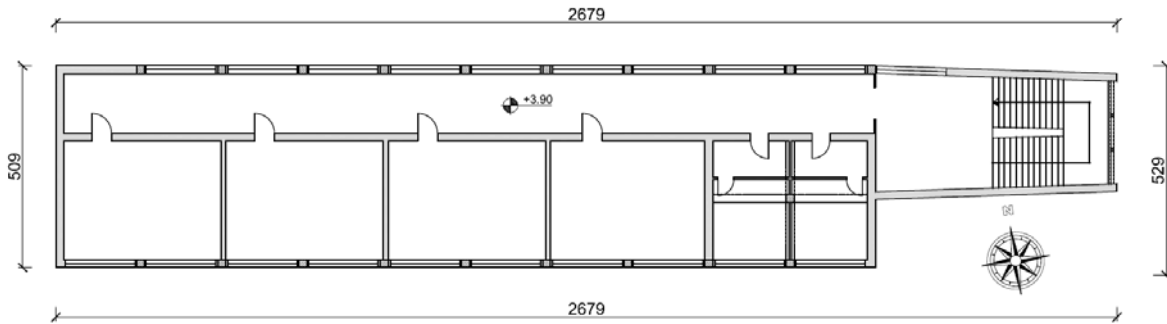
Тестовите со амбиентални вибрации го опишуваат однесувањето на конструкцијата во линеарното подрачје, затоа што амплитудите на вибрациите се мали. Исто така, овие тестови може да се искористат за опишување на линеарното однесување на оштетени конструкции и нивните компоненти, а може да се искористат и за развивање на конструктивни модели и алгоритми за анализа зависни од времето и амплитудата кои што се користат за набљудување на здравјето на конструкциите и во студиите за контрола на конструкциите. Основна предност на тестовите со амбиентални вибрации во однос на тестовите со принудни вибрации е тоа што за нивно спроведување вообичаено се користи лесна и мобилна опрема и се извршуваат со мал број оператори. Најчест извор на амбиенталните вибрации се: ветер, микро треперења на почвата и различни локални периодични или случајни побуди (сообраќај или тешка механизација). При спроведување тестови со принудни осцилации на испитуваните објекти потребно е да се предизвикаат големи сили кои што може да произведат корисни амплитуди на одговор. Овие сили се предизвикуваат со вибрациони уреди најчесто поставени на врвот на објектот. Тоа предизвикува позначајна побуда на формите на осцилации кои што имаат поголеми амплитуди при повисоките нивоа на објектот.

Во Македонија тестови со мерење на амбиенталните вибрации се спроведуваат повеќе од 30 години, најчесто на објекти со поголемо културно, историско, политичко и економско значење како што се: историски споменици, брани, мостови и сл. Објектите од високоградбата поретко се испитувани со овие методи, односно објектите кои што според „Правилникот за технички нормативи за изградба на објекти од високоградбата во сеизмички подрачја“ (ПНОВСП 1981) се групирани во категорија или во прва категорија се испитувале само во исклучителни ситуации. Објектите групирани во останатите категории воопшто не се испитувале. Со денешниот развој на мерната опрема, спроведувањето мерења на амбиенталните вибрации и современите технологии за пренос и следење на податоците од извршените мерења се овозможува лесна и едноставна примена на овој метод и кај вообичаените објекти од високоградбата. Еден таков систем развиен од американската компанија Digitexx Data Systems Inc. е применет на постоечки објект во Македонија. Системот се состои од пренослив електронски уред за аквизиција на податоци (PDAQ), лаптоп компјутер и сензори за мерење на забрзувањата (акцелератори) поврзани со висококвалитетни кабли.

Во овој труд детално е опишана методологијата за определување реален пресметковен модел на постоечки објект со мерење на амбиенталните вибрации. Со предложената методологија се добива пресметковен модел на конструкцијата на објектот кој на полно одговара на реалниот постоечки објект. Со реалниот пресметковен модел може да се спроведат различни линеарни и нелинеарни, динамички и сеизмички анализи и со исклучително голема прецизност може да се определи повредливоста на конструкцијата и евентуалната потреба од ретрофит, а со повремено или постојано набљудување може навреме да се открие појавата на штети.

2. ОПИС НА РАЗГЛЕДУВАНИОТ ПРОБЛЕМ

Зградата на основното училиште „Војдан Чернодрински“ во Скопје е избрана како карактеристичен пример за проучување и презентирање на развиената методологија од повеќе причини. Таа била изградена пред Скопскиот земјотрес во 1963 година, претставува објект од високоградбата категоризиран во прва категорија за која исклучително е важно да преживее иден земјотрес без посериозни оштетувања на конструктивниот систем, а со тоа да се заштитат



Сл. 1. Карактеристична основа на зградата

животите на младите деца кои претстојуваат во неа. За спроведување динамичка анализа на постоечки објект со реален пресметковен модел потребно е да се располага со податоци за геометријата на објектот, материјалот од кој е изведена и распоредот на масата во основа и по височина на објектот. За таа цел, во Архивот на Македонија пронајдена е проектна техничка документација за изградба на објектот. Иако нецелосна, со оваа документација утврдено е дека зградата е изградена во 1952 година. Таа е со правоаголна основа, габаритни димензии 53,58 x 10,18 m и се состои од приземје и два ката. Карактеристична основа на зградата е прикажана на слика 1. Од достапната документација може да се утврди дека конструктивниот систем е изведен со сидарија од полни тули и малтер со непознати карактеристики, а на одредени места изведени се армирано бетонски столбови со марка на бетон МБ 16 и армирано бетонски греди со марка МБ 22. Меѓукатната конструкција е ситноробреста изведена од бетон со марка МБ 22. При проектирањето на конструкцијата извршена е само статичка анализа од вертикални гравитациони товари.

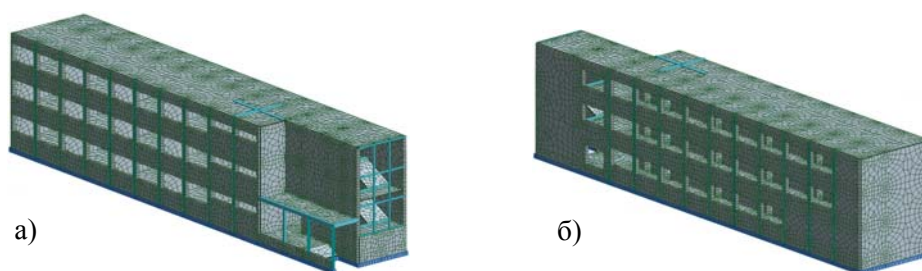
Заради утврдување на фактичката состојба со геометријата извршени се детални мерења на лице место со кои се потврдени голем број проектни параметри, но и забележани се одредени пренамени на просториите. Со прегледот на документацијата и состојбата на лице место се констатира дека армирано бетонските столбови служат само за врамвање на сидаријата, а меѓукатната конструкција има доволна крутост во својата рамнина и во анализите може да се третира како бескрајно крута.

За употребениот материјал не постојат целосни информации освен оние дадени во проектната документација. Поради тоа што не беше можно земање пробни примероци и утврдување на карактеристиките на материјалот единствено можно беше да се спроведат недеструктивни методи, односно со помош на амбиенталните вибрации да се утврди носивоста на конструкцијата. Затоа, на зградата извршени се серија мерења на нејзиниот одговор на амбиентални вибрации, а со овие резултатите извршено е ажурирање на пресметковниот модел.

3. МОДЕЛИРАЊЕ СО КОНЕЧНИ ЕЛЕМЕНТИ И ИДЕНТИФИКАЦИЈА НА ДИНАМИЧКИТЕ КАРАКТЕРИСТИКИ

Пред изведување на експерименталните тестови, а врз основа на геометриските снимања, развиен е просторен пресметковен модел на конструкцијата со конечни елементи (КЕ), слика 2.

Сидаријата и меѓукатната конструкција во зградата се моделирани со површински конечни елементи со 4 јазли, а армирано бетонските греди и столбови со линиски конечни елементи. Употребен е релативно голем број конечни елементи за да се добие правилна распределба на масите во моделот и за да може реално да се претстават отворите во носечките сидови. За формирање на моделот употребени се неколку претпоставки. Тој е круто вклетен во подлогата, за сидаријата претпоставена е константна тежина на единица волумен од $19,6 \text{ kN/m}^3$, Поасонов коефициент од 0,15 и модул на еластичност од 2800 МПа, додека за армирано бетонските елементи карактеристиките на материјалот се моделирани согласно проектираните марки. Меѓукатните конструкции се моделирани како апсолутно крути во својата рамнина.



Сл. 2. 3Д пресметковен модел со КЕ: (а) поглед од југо-исток, (б) поглед од северо-запад

За да се утврдат динамичките карактеристики на конструкцијата спроведена е анализа со тонови форми. За нивно пресметување, освен сопствената тежина на конструктивните елементи, земена предвид е и масата од постојаниот товар пресметана согласно проектот. Пресметаните природни фреквенции и периоди за првите 6 тонови форми на почетниот пресметковен модел се дадени во табелата 1.

Тон	Фреквенција (Hz)	Периода (sec)
1	5,33	0,19
2	6,58	0,15
3	7,80	0,13
4	8,78	0,11
5	12,34	0,08
6	12,98	0,08

Табела 1. Фреквенции и периоди на почетниот пресметковен модел.

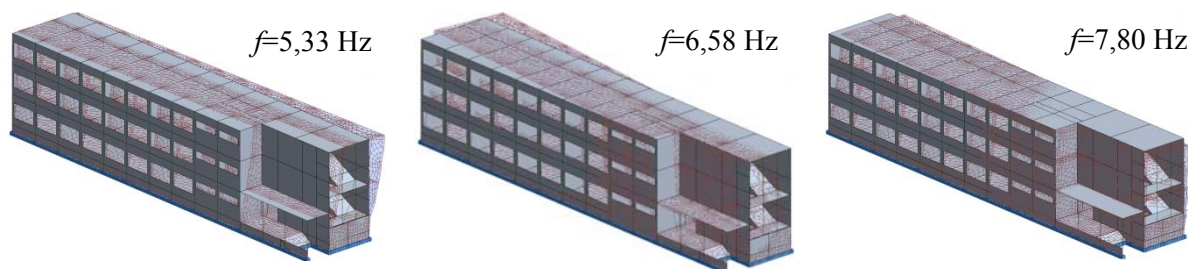
Во првата тонова форма конструкцијата осцилира транслаторно во правец север-југ и мала ротација условена од различната крутост во делот околу училишните простории и скалите. Во втората тонова форма забележани се торзиони осцилации, додека во третата тонова форма осцилациите се транслаторни во правец исток-запад. Првите три тонови форми се прикажани на сликата 3.

4. ОПИС НА ТЕСТОВИТЕ И МЕТОДОТ ЗА АНАЛИЗА

На 18 август 2011 година беа спроведени три серии експериментални снимања. Секоја серија содржи резултати од мерните сензори на еден кат, додека за сите серии беа поставени референтни сензори (T1) на најгорниот кат кои што не се поместуваа при снимањето. Пред секое снимање беше вршена калибрација на сензорите. Времетраењето на секое снимање изнесуваше 212 sec, а брзината на запишување беше дефинирана на 200 Hz.

4.1. Мерна опрема

За мерење на амбиенталните вибрации беше искористен мобилниот систем за аквизиција на податоци Digitexx PDAQ Premium со физички димензии 457 x 330 x 170 mm, слика 4. Системот е подготвен за аквизиција и анализа на податоци од далечина.



Сл. 3. Први три тонови форми идентификувани со почетниот пресметковен модел



Сл. 4. Digitexx PDAQ Premium



Сл. 5. Триаксијален сензор Digitexx D110-T

Главните карактеристики се: 16 канали, 24 бита, локална и далечинска анализа на податоците во реално време, FFT, функции на трансфер, меѓукатно поместување врз основа на стандардите за сеизмичка сигурност на згради FEMA 351 и 274, хистерезисна петелка на меѓукатното поместување, пресметување забрзување, брзина и поместување. Овој систем претставува совршена опција за постојано набљудување на здравјето на конструкциите за период до 6 месеци. Главни карактеристики на сензорите кои што ги регистрираат забрзувањата се: едно или триаксијални микро електро-механички капацитативни сензори, со широк динамички домет $\pm 3g$, одличен опсег и ултра низок шум, што ги прави идеални при набљудување на здравјето на конструкциите, слика 5.

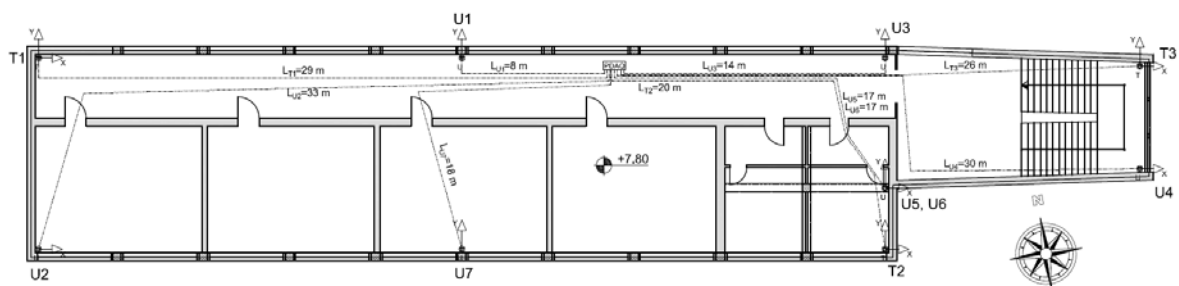
4.2. Распоред на мерната опрема и снимање

Тестовите со амбиентални вибрации беа спроведени во 9 точки на секој кат, со едноаксијални (U) и триаксијални (T) сензори. На сликата 6 шематски е претставен распоредот на сензорите на вториот кат, положбата на каблите и насоките во кои се снимаат податоците. Распоредот на сензорите на останатите катови е идентичен, а поради непристапност на кровот на овој кат не беа вршени мерења. Уредот за аквизиција на податоците се преместуваше од кат на кат при секое снимање. Сензорите беа поставени директно на под-терацо, а поради неможност да се постават на крута подлога во училниците, тие беа поставени на под од паркет (U2 и U7).

При испитувањето во зградата немаше останати луѓе, освен операторите кои мируваа при снимањето. Во зградата немаше вклучено активни уреди за греење и ладење, а водата од чешмите беше запрена. Снимањето се одвиваше од 10-14 часот, а надворешната температура се движеше помеѓу $26-33^{\circ}\text{C}$. Вкупниот број на мерни точки каде што се регистрираат забрзувањата за трите серии изнесува 27. Сигналите претворени во дигитална форма беа запишани на тврд диск во компјутерот за аквизиција на податоците во ASCII формат.

4.3. Методи за анализа на измерени податоци

За анализа на комплексната нестационарна природа на мерените побуди потребно е да се искористат техники за идентификација на динамичките карактеристики базирани само на излезните податоци како: методот за декомпозиција на фреквентниот домен (FDD), подобрениот метод за декомпозиција на фреквентниот домен (EFDD) и методите за идентификација на стохастичкиот подпростор (SSI) (El-Borgi et al. 2005). Овие методи успешно се применети на згради и мостови, а се имплементирани во програмот ARTeMIS (2011).



Сл. 6. Распоред на сензорите на вториот кат

Суштината на методот FDD се состои од приближна декомпозиција на мерениот одговор на конструкцијата во низа одговори на независни системи со еден степен на слобода (CECC), по еден за секоја тонова форма. Декомпозицијата се врши со единечна вредност за декомпозиција (SVD) за секоја матрица на спектрална густина добиена од мерењата. Како резултат од декомпозицијата се добиваат низа единечни вредности и соодветните единечни вектори. Единечните вредности се проценети вредности за спектралната густина на компонентите од CECC, а единечните вектори се проценети вредности на тоновите форми. Понатамошното усовршување на методот FDD е методот EFDD, кој што во програмот ARTeMIS ги користи проценетите вредности за динамичките карактеристики добиени со методот FDD за да се идентификуваат спектрални функции на CECC во облик на своно. Од овие функции методот ги проценува дополнителните динамички карактеристики како модалното пригушување.

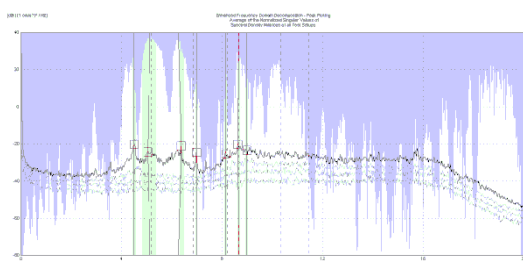
За параметарска идентификација на динамичките карактеристики се користат параметарски методи како методот за идентификација на стохастичкиот подпростор (SSI). Овој метод е урамнотежен метод за процена кој што користи сирови податоци во временски домен со тоа што директно во податоците добиени од сензорите се подесува параметарски модел. Параметарските модели се карактеризираат со претпоставка дека математичкиот модел е формиран од низа параметри, а истиот е линеарен временски инваријантен систем на диференцијални равенки. Со методот SSI се подесуваат параметрите со кои се менува начинот на кој моделот се подесува во податоците. Генерално, целта на методот е да се проценат низа параметри кои што ќе го минимизираат отстапувањето помеѓу предвидениот одговор на системот на моделот и мерениот одговор на системот. Овој метод има голема предност пред методите кои го користат фреквентниот домен заради тоа што модалната густина може да стане многу голема поради појава на блиски тонови форми со големо пригушување. Повеќе детали за теоријата на методите за анализа на измерените податоци се дадени во ARTeMIS (2011), El-Borgi (2005) и Vo Ibsen (2006).

5. РЕЗУЛТАТИ

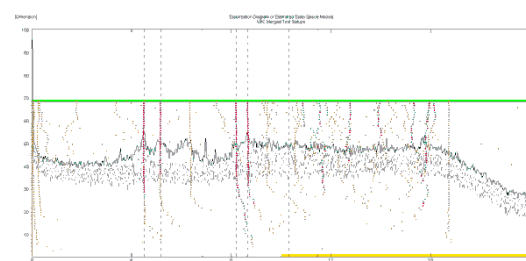
На сликата 7 се прикажани средните вредности на нормализираните единечни вредности на матриците на спектрални густини за сите мерења со помош на методот EFDD (ANPSD), добиени со програмот ARTeMIS. Единечните вредности во овој приказ одговараат на идентификуваните фреквенции. На сликата 8 даден е стабилизациониот дијаграм добиен при анализа со методот Crystal Clear SSI[®]. Анализата со двете методи е извршена за идентификација на природните фреквенции со вредности од 0-20 Hz.

5.1. Споредба на резултатите

Во табелата 2, прикажани се проценетите вредности за измерените природни фреквенции за првите три идентификувани тонови форми со користење на двете методи за анализа. Во оваа табела исто така се прикажани пресметаните природни фреквенции добиени со почетниот пресметковен модел.



Сл. 7. ANPSD за методот EFDD



Сл. 8. Стабилизационен дијаграм за методот Crystal Clear SSI[®]

Може да се заклучи дека двете методи даваат приближно исти резултати за природните фреквенции земајќи ги предвид првите три тонови.

Тон	Процентот со мерење				Пресметани фреквенции (Hz)	Релативна грешка EFDD/SSI (%)
	EFDD (Hz)	Пригуш. (%)	SSI (Hz)	Пригуш. (%)		
1	4,50	1,19	4,49	2,56	5,33	16 / 16
2	5,13	2,05	5,16	4,02	6,58	22 / 22
3	6,25	1,55	6,87	2,90	7,80	20 / 12

Табела 2. Проценети вредности за природните фреквенции и коефициенти на пригушување и пресметани фреквенции со почетниот пресметковен модел.

Релативната грешка на проценетите фреквенции за двете методи во однос на пресметаните со почетниот модел се движат од 12-22%. Поголемо разидување од 90-115% се забележува за вредностите на пригушувањето што се должи на различниот пристап за проценка на пригушувањето.

6. АЖУРИРАЊЕ НА ПОЧЕТНИОТ МОДЕЛ СО КОНЕЧНИ ЕЛЕМЕНТИ

Основниот концепт за ажурирање на моделот се состои во менување на одредени критични параметри во моделот со КЕ се додека пресметаните динамички карактеристики не одговараат на експерименталните резултати. На тој начин ажурираниот модел обезбедува подобра аналитичка претстава за динамичкиот одговор на конструкцијата и претставува калибрирана алатка за предвидување на сеизмичкиот одговор (Lord et al. 2004). Цел на ажурираниот модел е да се добие прифатлива корелација меѓу динамичките карактеристики добиени експериментално и нумерички. Оваа операција подразбира анализа на чувствителноста на матрицата на крутост на моделот во корелација со промената на вредностите на одредени однапред дефинирани параметри (Ventura 2005). За да се подобри корелацијата меѓу експерименталните и пресметаните резултати се врши корелациона анализа на одбрани параметри на одговор. Вообичаено, тоа се прави со итеративно менување на параметрите се додека корелационите коефициенти не го задоволат критериумот за конвергенција. Ажурирањето на моделот може да се изведе со мануелно или автоматско менување на параметрите. Предност на автоматскиот начин е што итеративно може да се менуваат вредности на повеќе параметри, а споредбата помеѓу фреквенциите се прави со контрола на релативната грешка меѓу пресметаните и измерените фреквенции, додека споредбата помеѓу пресметаните и измерените тонови форми се проценува со критериумот MAC (Allemang and Brown 1982). За потребите на ова истражување одбран е мануелен начин за ажурирање на моделот.

Ажурирањето на моделот најнапред е извршено со промена на апсолутно крутата меѓуктна конструкција во моделот со КЕ во флексибилна со користење на реални вредности за материјалот. Поради недостаток на податоци за јакостните и механичките карактеристики на сидаријата, одбрано е да се менуваат параметарите за модул на еластичност и волуменска тежина. Извршени се неколку мануелни итерации, а во табелата 3 претставени се вредностите на природните фреквенции за првите три тонови форми, пресметани со почетниот модел со КЕ, проценети со мерење на амбиентални вибрации и пресметани со ажурираниот модел со КЕ.

Тон	Почетен модел со КЕ-крут (Hz)	Процентот со мерење-SSI (Hz)	Почетен модел со КЕ-флексибилен (Hz)	Ажуриран модел со КЕ-флексибилен (Hz)	Релативна грешка (%)
1	5,33	4,49	4,38	4,17	7,7
2	6,58	5,16	5,44	5,10	1,2
3	7,80	6,87	7,26	6,78	1,5

Табела 3. Споредба на првите три природни фреквенции пред и по ажурирање на пресметковниот модел.

Во табелата 4 сумирани се промените на вредностите за модулот на еластичност и волуменска тежина во моделот со КЕ пред и по ажурирањето.

Елемент	Тип	Почетна вредност	Конечна вредност	Разлика (%)
Сид	Е	2800	2850	1,8
Сид	γ	19,6	18,7	4,6

Табела 4. Споредба на почетната и конечната вредност на параметрите одбрани за ажурирање.

Промената на типот на меѓукатна конструкција во моделот со КЕ од апсолутно крута во флексибилна значително влијае на вредноста на природните фреквенции. Тие се разликуват од проценетите за 3-5% што од една страна е условено и од добрата проценка за почетните вредности на сидаријата. Со ажурирање на одбраните параметри моделот дополнително се приближува до утврдените вредности.

7. ЗАКЛУЧОК

Карактеристичните природните фреквенции и тонови форми за конструкцијата на зградата на основното училиште „Војдан Чернодрински“ се определени експериментално, со проценка од мерењата на амбиенталните вибрации и аналитички со модели со конечни елементи. Врз основа на измерените вредности ажуриран е почетниот модел и добиен е реален пресметковен модел кој со своите динамички карактеристики наполно одговара на постоечкиот објект. На тој начин ажурираниот модел е подготвен за понатамошни детални сеизмички или нелинеарни анализи. Врз основа на овој пример се прикажува методологија за ефективно определување пресметковен модел за конструкции од високоградбата користејќи резултати од анализа за модална идентификација.

БЛАГОДАРНОСТ

Авторите упатуваат искрена благодарност до општината Карпош и училиштето „Војдан Чернодрински“ во Скопје за обезбедување дозвола и беспрекорни услови за извршување на мерењата, како и Архивот на Македонија за овозможување увид во архивската граѓа за објектот на училиштето.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ivanović S.S., Trifunac M.D., Novikova E.I., Gladkov A.A., Todorovska M.I. Ambient vibration tests of a seven-story reinforced concrete building in Van Nuys, California, damaged by the 1994 Northridge earthquake. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 19 (2000) 391-411.
- [2] „Правилник за технички нормативи за изградба на објекти од високоградбата во сеизмички подрачја“, Сл. весник 31/81, 49/82, 29/83, 21/88 и 52/90.
- [3] El-Borgi S., Choura S., Ventura C., Baccouch M., Cherif F. Modal identification and model updating of a reinforced concrete bridge. *Smart Structures and Systems*, Vol. 1, No. 1 (2005) 83-101.
- [4] ARTeMIS Testor 5.2, ARTeMIS Extractor 5.3, Structural Vibration Solutions, Inc., ©1999-2011 Structural Vibration Solutions, Inc., Aalborg, Denmark, www.svibs.com.
- [5] Ibsen L.B., Liingaard M. Experimental modal analysis. DCE Technical Report No. 10, Aalborg University, 2006.
- [6] Lord J.F., Ventura C.E., Dascotte E. Automated Model Updating Using Ambient Vibration Data from a 48-storey Building in Vancouver. Proceedings of the 22nd International Modal Analysis Conference, Dearborn, Michigan, USA, 2004.
- [7] Ventura C.E., Lord J.F., Turek M., Brincker R., Andersen P., Dascotte E. FEM updating of tall buildings using ambient vibration data. Proceedings of Eurodyn Conference, 2005.
- [8] Allemang R.J., Brown D.L. A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis, Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference (IMAC), Orlando (FL), 1982.